Lycée secondaire Bennane-Bodheur	*Devoir de contrôle n°3*	*Coefficient: 3*
Mr : Bouhouch Ameur	*4ème SC 1*	*Le 23/04/2015*

Exercice n°1: **(5 pts)**

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.On donne les points $A(1,0,0)$, $B(1,1,1)$et $C(0,1,0)$.

1) a) Montrer que les points A, B et C déterminent un plan P.
   b) Vérifier qu'une équation cartésienne de P est $x+y-z-1=0$.
2) Soit le point $D(0,0,1)$.Montrer que ABCD est un tétraèdre et calculer son volume V.
3) Soit S l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que $x^2+y^2+z^2-4x-2y+2z+2=0$
   a) Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre I et le rayon R.
   b) Montrer que P coupe S suivant un cercle (Γ) dont on déterminera le rayon r et le centre H.
4) Pour tout réel m, soit S_m l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que
   $x^2+y^2+z^2-2(m+2)x-2(m+1)y+2(m+1)z+2(m+1)=0$.
   a) Montrer que pour tout réel m, S_m est une sphère dont on précisera le centre I_m et le rayon R_m.
   b) Montrer que toutes les sphères S_m contiennent le cercle (Γ).

Exercice n°2: **(4 pts)**

Soit $I_n=\int_1^e (\ln x)^n dx$, $n\in \mathbb{N}^*$.

1) Vérifier que $I_1=1$.
2) a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_{n+1}=e-(n+1)I_n$.
   b) Déterminer, alors, I_2 et I_3.
   c) En déduire que $\int_1^e (1-\ln x)^3 dx = 6e-16$. (Rappel: $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$)
3) Montrer que $0\le I_n \le \frac{e}{n+1}$, pour tout $n\in \mathbb{N}^*$.
4) Calculer, alors, $\lim_{n\to+\infty} I_n$ et $\lim_{n\to+\infty}(n.I_n)$.

Exercice n°3: **(4.5 pts)**

La concentration plasmatique (en mg/l) d'un certain médicament dans le sang, en fonction du temps (exprimé en heures) est notée $C(t)$. La concentration initiale est de 6mg/l.

Dans cet exercice, on va étudier les deux types d'élimination de ce médicament par un organisme: <u>élimination rénale et élimination hépatique.</u>

A) On admet que la vitesse d'élimination rénale de ce médicament par l'organisme est donnée par $C'(t)=-0.25C(t)$.

1) Déterminer $C(t)$, $t\ge 0$.
2) Donner le sens de variation de $C(t)$.
3) Déterminer le temps $t_{1/2}$ (arrondi à l'unité) nécessaire pour passer de la concentration initiale à sa moitié.

Voir suite au verso ⇨

B) On admet que la vitesse d'élimination hépatique de ce médicament par l'organisme est donnée par $C'(t) = -0.2C(t) + 0.3$.

1) Déterminer $C(t)$, $t \geq 0$.

2) Déterminer le temps $t'_{1/2}$ (arrondi à l'unité) nécessaire pour passer de la concentration initiale à sa moitié.

3) Comparer $t_{1/2}$ et $t'_{1/2}$.

Exercice n°4: **(6.5 pts)**

A) Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = (1-x)e^x + 1$

1) Dresser le tableau de variation de g.

2) a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $1.2 < \alpha < 1.3$.

b) En déduire le signe de g sur IR.

B) Soit f une fonction définie sur IR par $f(x) = \dfrac{x}{e^x + 1}$. On désigne par **(C)** sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Interpréter graphiquement ce résultat.

2) a) Montrer que la droite $\Delta : y = x$ est une asymptote à **(C)**.

b) Etudier la position relative de **(C)** et Δ.

3) Montrer que pour tout réel x, on a: $f(-x) = f(x) - x$.

4) Vérifier que $f(\alpha) = \alpha - 1$ et que $f(-\alpha) = -1$

5) a) Montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(e^x + 1)^2}$ puis dresser le tableau de variation de f.

b) Vérifier que $f'(-\alpha) = 1$ puis écrire une équation de la tangente T à **(C)** au point d'abscisse $-\alpha$.

6) Pour tout réel non nul x, soient les points M et M' de **(C),** d'abscisses respectives x et $-x$.
Montrer que la droite (MM') est parallèle à une droite fixe qu'on précisera.

7) Dans la figure de la page annexe, on a placé dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ le point de coordonnées $(\alpha, 0)$.

a) Construire les points $A(\alpha, \alpha - 1)$ et $B(-\alpha, -1)$.

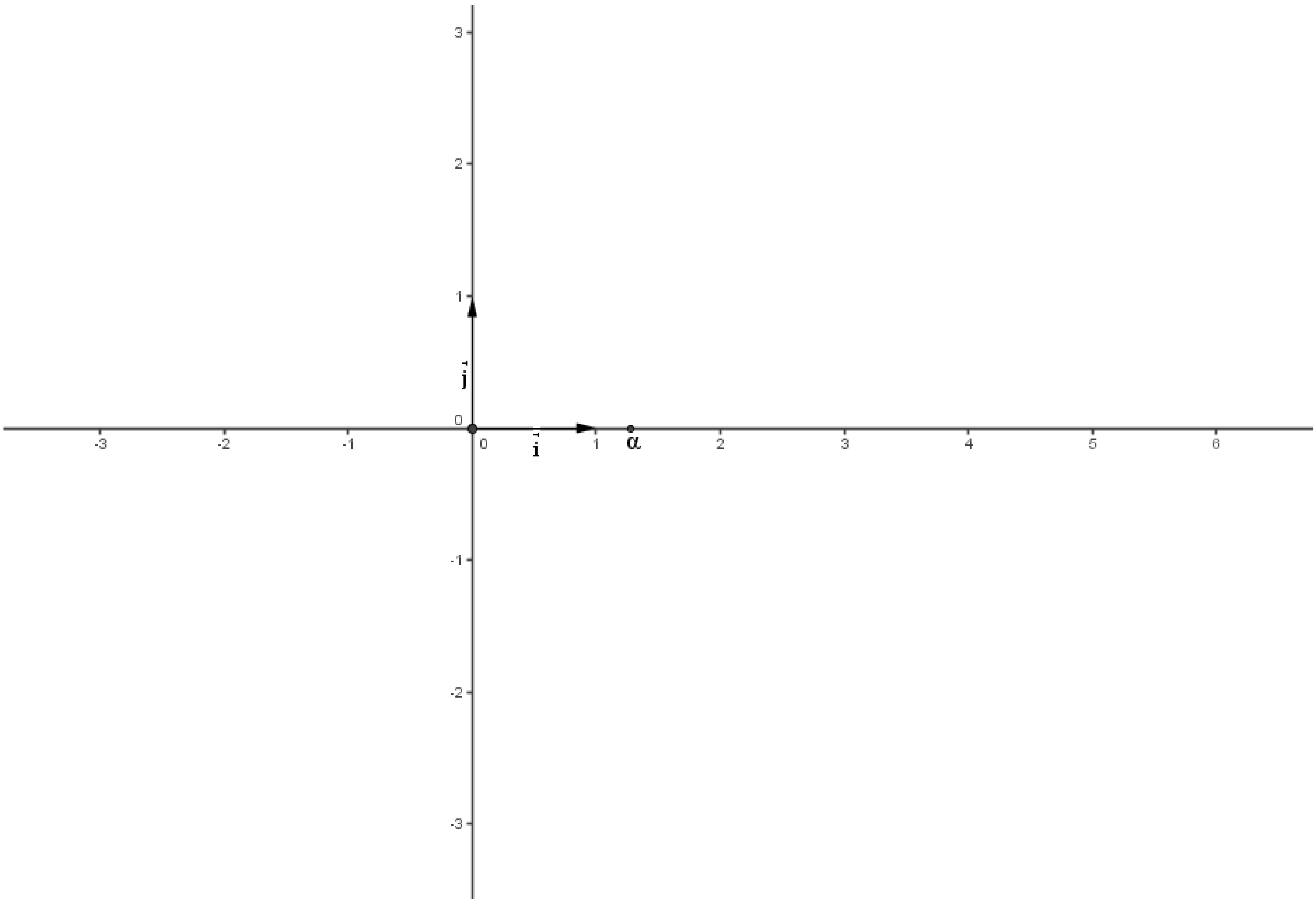
b) Construire la tangente T.

c) Tracer la courbe **(C)** et la droite Δ.

BON TRAVAIL

Page annexe à compléter et à rendre avec votre copie

Nom: **Prénom:**



Correction du devoir de contrôle n°3

4ème sc **Mr:Bouhouch Ameur**

Correction d'exercice n°1:

1) a) On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\neq\vec{0}$ donc A, B et C déterminent un plan P.

b) Le vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan P, alors $P:-x-y+z+d=0$

Or $A(1,0,0)\in P\Rightarrow -1+d=0\Leftrightarrow d=1$.D'ou $P:-x-y+z+1=0$ et par suite $\underline{P:x+y-z-1=0}$.

2) $D(0,0,1)$.On a : $-0-0+1+1=2\neq 0$ donc $D\notin P$ et alors ABCD est un tétraèdre.

Son volume est $V=\dfrac{\left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AD}\right|}{6}$ avec $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ donc $\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AD}=2$

On déduit que $V=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$ (u.v).

3) a) On a $x^2+y^2+z^2-4x-2y+2z+2=0\Leftrightarrow x^2-4x+y^2-2y+z^2+2z+2=0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2-4+(y-1)^2-1+(z+1)^2-1+2=0\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=4>0$

D'où S est une sphère de centre $I(2,1,-1)$ et de rayon R=2.

b) Comme $d(I,P)=\dfrac{|2+1-(-1)-1|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}<R$ alors P coupe S suivant un cercle (Γ) de rayon

$r=\sqrt{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4-3}=1$ et de centre $H(x,y,z)$ tels que $\overrightarrow{IH}=\alpha.\overrightarrow{N_P}$ et $H\in P$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-2=\alpha\\y-1=\alpha\\z+1=-\alpha\\x+y-z-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2+\alpha\\y=1+\alpha\\z=-1-\alpha\\2+\alpha+1+\alpha-(-1-\alpha)-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=0\\z=0\\\alpha=-1\end{cases}\Leftrightarrow H=A.$$

4) a) On a : $x^2+y^2+z^2-2(m+2)x-2(m+1)y+2(m+1)z+2(m+1)=0$

$\Leftrightarrow (x-(m+2))^2-(m+2)^2+(y-(m+1))^2-(m+1)^2+(z+(m+1))^2-(m+1)^2+2(m+1)=0$

$\Leftrightarrow (x-(m+2))^2+(y-(m+1))^2+(z+(m+1))^2+2(m+1)=(m+2)^2+2(m+1)^2-2m-2$

$\Leftrightarrow (x-(m+2))^2+(y-(m+1))^2+(z+(m+1))^2+2(m+1)=3m^2+6m+4$

Comme $3m^2+6m+4>0$ (Car $\Delta=6^2-4\times3\times4=-12<0$)

Alors S_m est une sphère de centre $I_m(m+2,m+1,-m-1)$ et de rayon $R_m=\sqrt{3m^2+6m+4}$.

b) On a : $M(x,y,z)\in S_m\quad \forall m\in IR$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2(m+2)x-2(m+1)y+2(m+1)z+2(m+1)=0\ \forall m\in IR$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2mx-4x-2my-2y+2mz+2z+2m+2=0\ \forall m\in IR$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-4x-2y+2z+2-2m(x+y-z-1)=0\ \forall m\in IR$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2-4x-2y+2z+2=0 \\ x+y-z-1=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow M \in S \cap P \ \underline{\Leftrightarrow M \in (\Gamma)}.$$

Donc toutes les sphères S_m contiennent (Γ).

Correction d'exercice n°2:

1) $I_1 = \int_1^e (\ln x)dx = [x\ln(x) - x]_1^e = (e\ln(e) - e) - (1\ln(1) - 1) = (e-e) - (-1) = 1.$

2) a) $I_{n+1} = \int_1^e (\ln x)^{n+1} dx$.

On pose $u(x) = (\ln x)^{n+1} \rightarrow u'(x) = (n+1)(\ln x)^n \cdot \dfrac{1}{x}$

$v'(x) = 1 \qquad \rightarrow \quad v(x) = x$

On a : $I_{n+1} = \left[x(\ln x)^{n+1}\right]_1^e - (n+1)\int_1^e (\ln x)^n dx = e - (n+1)I_n$.

b) $I_2 = e - 2I_1 = e - 2$ et $I_3 = e - 3I_2 = e - 3(e-2) = 6 - 2e$.

c) $\int_1^e (1-\ln x)^3 dx = \int_1^e \left(1 - 3(\ln x) + 3(\ln x)^2 - (\ln x)^3\right)dx = \int_1^e 1dx - 3\int_1^e (\ln x)dx + 3\int_1^e (\ln x)^2 dx - \int_1^e (\ln x)^3 dx$

$= e - 1 - 3I_1 + 3I_2 - I_3 = e - 1 - 3 + 3e - 6 - 6 + 2e = 6e - 16$.

3) Comme $(\ln x)^n \geq 0 \ \ \forall x \in [1, e]$ et $n \in IN^*$ alors $\underline{I_n \geq 0}$ $\ \forall n \in IN^*$.

Puisque $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$ et $I_{n+1} \geq 0$ alors $e - (n+1)I_n \geq 0 \Leftrightarrow (n+1)I_n \leq e \Leftrightarrow \underline{I_n \leq \dfrac{e}{n+1}}$ $\ \forall n \in IN^*$.

Conclusion: $0 \leq I_n \leq \dfrac{e}{n+1}$, pour tout $n \in IN^*$.

4) Puisque $0 \leq I_n \leq \dfrac{e}{n+1}$, et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{e}{n+1} = 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$.

On a $I_{n+1} = e - nI_n - I_n \Leftrightarrow nI_n = e - I_n - I_{n+1}$ et alors $\lim\limits_{n \to +\infty} nI_n = \lim\limits_{n \to +\infty} e - I_n - I_{n+1} = e$

Correction d'exercice n°3:

A) 1) On a : $C'(t) = -0.25C(t)$ donc $C(t) = k.e^{-0.25t}$ $\ k \in IR$

Or $C(0) = 6 \Rightarrow k = 6$ et alors $\underline{C(t) = 6.e^{-0.25t}}$.

2) $C'(t) = -1.5e^{-0.25t} < 0$ donc $t \mapsto C(t)$ est strictement décroissante.

3) On a : $C(t_{1/2}) = 3 \Leftrightarrow 6e^{-0.25t_{1/2}} = 3 \Leftrightarrow 0.25t_{1/2} = \ln(2) \Leftrightarrow t_{1/2} = \dfrac{\ln(2)}{0.25} \approx 2.8$.

A) 1) On a: $C'(t) = -0.2C(t) + 0.3$ donc $C(t) = k.e^{-0.2t} + \dfrac{0.3}{0.2} \Leftrightarrow C(t) = ke^{-0.2t} + 1.5$ $\ k \in IR$

Or $C(0) = 6 \Rightarrow k + 1.5 = 6 \Leftrightarrow k = 4.5$ et alors $\underline{C(t) = 4.5.e^{-0.2t} + 1.5}$.

2) On a : $C(t'_{1/2}) = 3 \Leftrightarrow 4.5e^{-0.2t'_{1/2}} = 3 \Leftrightarrow 0.2t'_{1/2} = \ln(3) \Leftrightarrow t'_{1/2} = \dfrac{\ln(3)}{0.2} \approx 5.5$.

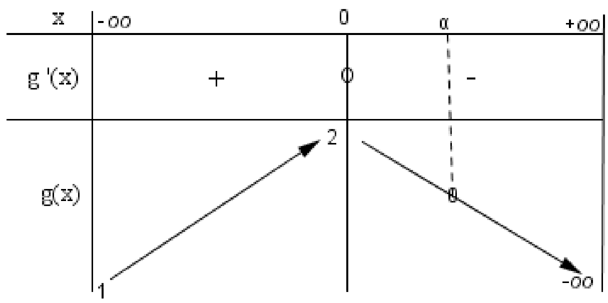
3) On a $t'_{1/2} > t_{1/2}$.

Correction d'exercice n°4:

A) On a $g(x) = (1-x)e^x + 1$, $x \in IR$.

1) On a $g'(x) = (-1).e^x + (1-x).e^x = -xe^x$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ D'ou le tableau de variation de g:



2) a) *d'après le tableau de variation de g, la fonction g ne s'annule pas sur $]-\infty,0]$.

* g est continue et strictement décroissante sur $[0,+\infty[$

Donc elle réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $g([0,+\infty[) =]-\infty,2]$;

Comme $0 \in]-\infty,2]$ alors l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique $\alpha \in [0,+\infty[$.

<u>Conclusion:</u> l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α.

Comme $g(1.2)\times g(1.3)<0$ alors $1.2<\alpha<1.3$.

b) <u>Signe de g sur IR:</u>

* Si $x \le \alpha$ alors $g(x) \ge 0$.
* Si $x \ge \alpha$ alors $g(x) \le 0$.

B)

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\dfrac{e^x}{x}+\dfrac{1}{x}} = 0 \Rightarrow$ La droite d'équation $x=0$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

2) a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-x = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{e^x+1}-x = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-xe^x}{e^x+1} = 0 \Rightarrow$ la droite $\Delta : y=x$ est une asymptote à **(C).**

b) <u>Position relative de (C) et Δ</u>:

On a : $f(x)-x = \dfrac{x}{e^x+1}-x = \dfrac{-xe^x}{e^x+1}$ donc:

* Si $x>0$ alors **(C)** est au dessous de Δ.
* Si $x<0$ alors **(C)** est au dessus de Δ.
* Si $x=0$ alors **(C)** et Δ sont sécantes.

3) On a : $f(-x) = \dfrac{-x}{e^{-x}+1} = \dfrac{-xe^x}{1+e^x} = \dfrac{-x(1+e^x)+x}{1+e^x} = -x+\dfrac{x}{1+e^x} = -x+f(x)$ et alors $f(-x)=f(x)-x$.

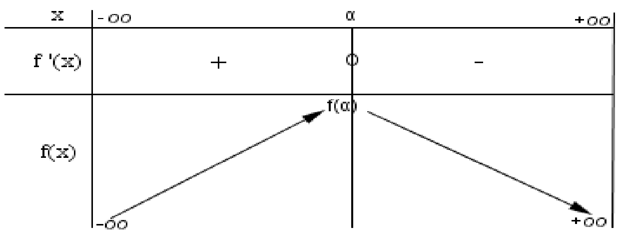
4) Comme $g(\alpha)=0$ alors $(1-\alpha)e^\alpha+1=0 \Leftrightarrow (1-\alpha)e^\alpha=-1 \Leftrightarrow e^\alpha = \dfrac{1}{\alpha-1}$.

D'où $f(\alpha) = \dfrac{\alpha}{e^\alpha+1} = \dfrac{\alpha}{\dfrac{1}{\alpha-1}+1} = \dfrac{\alpha}{\dfrac{1+\alpha-1}{\alpha-1}} = \alpha\times\dfrac{\alpha-1}{\alpha} = \alpha-1$.

Puisque $f(-x)=f(x)-x$ alors $f(-\alpha)=f(\alpha)-\alpha=\alpha-1-\alpha=-1$.

5) a) $f'(x) = \dfrac{1\times(e^x+1)-xe^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{(1-x)e^x+1}{(e^x+1)^2} = \dfrac{g(x)}{(e^x+1)^2}$.

Tableau de variation de f:



b) Montrons que $f'(-\alpha)=1$??

Comme $f(-x)=f(x)-x$ alors, en dérivant chaque membre on aura $-f'(-x)=f'(x)-1$ et donc $f'(-\alpha)=-f'(\alpha)+1=1$ (car $f'(\alpha)=0$).

<u>Equation de la tangente:</u> T: $y=f'(-\alpha)(x+\alpha)+f(-\alpha) \Rightarrow$ T: $y=x+\alpha-1$.

6) Soit $x\in IR^*$, on a : $M(x,f(x))$ et $M'(-x,f(-x))$ deux points de **(C).**

On a : $\overrightarrow{MM'} = (-x-x)\vec{i}+(f(-x)-f(x))\vec{j}$

$= (-2x)\vec{i}+(-x)\vec{j}$ (on sait que $f(-x)-f(x)=-x$)

$= -x\left(2\vec{i} + \vec{j}\right)$

$= -x\overrightarrow{OE}$ tel que $E(2,1)$.Donc (MM') est parallèle à la droite (OE).

7) Figure:

a) * <u>Construction de A:</u> La droite d'équation $x = \alpha$ coupe la droite d'équation $y = x - 1$ en $A(\alpha, \alpha - 1)$.

* <u>Construction de B:</u>

On construit le point de coordonnées $(-\alpha, 0)$.

Les droites d'équations $x = -\alpha$ et $y = -1$ se coupent en $B(-\alpha, -1)$.

b) <u>Construction de T:</u>

En remarquant que le point de coordonnées $F(0, \alpha - 1)$ appartient à T, alors $T = (BF)$.

c) Courbe (voir figure).